ЗАДАЦИ – IV НЕДЕЉА

1. Доказати да за свако $x>0$ постоји $n\in\mathbb{N}$ т.д. $0<\frac{1}{n}<x$.

2. Доказати да је $(\mathbb{R},+,\cdot,\leq,0,1)$ комплетно потпуно уређено поље.

3. Нека је дат скуп $\mathcal{A}=\{(A_i, B_i)\mid i\in I\}$ Дедекиндових пресека (тј. реалних бројева). Тада је $\sup\mathcal{A} := \left(\bigcup_{i\in I} A_i, \mathbb{Q}\setminus\bigcup_{i\in I} A_i\right)$.

4. Доказати да у сваком пољу карактеристике 0, $(E,+,\cdot,0,1)$ важи да за свако $m\in\mathbb{Z}$, $k,l\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$:
$$(mk\cdot 1)\cdot(lk\cdot 1)^{-1} = (m\cdot 1)\cdot(l\cdot 1)^{-1}.$$

5. Нека је $(E,+,\cdot,0,1)$ поље карактеристике нула. Нека су $\varphi, h : (\mathbb{Q},+,\cdot,0,1)\to(E,+,\cdot,0,1)$ два хомоморфизма. Доказати $\varphi=h$, тј. $\varphi(q)=h(q)$, $\forall q\in\mathbb{Q}$.

6. Доказати да у сваком потпуно уређеном пољу $(E,+,\cdot,0,1)$ важи $x\leq y \Rightarrow -y\leq -x$.

7. Нека је $(E,+,\cdot,\leq,0,1)$ потп. уређено Архимедско поље. Доказати да је $\mathbb{Q}_E$ густ у E, тј. $\forall a,b\in E$, $b>a$ $(\exists q\in\mathbb{Q})$ т.д. $q\cdot 1\in(a,b)$.

8. Нека је $(A,+,\leq,0)$ уређена Абелова група и нека $E,F\subseteq A$ имају супремум. Доказати да је тада
$$\sup E+\sup F = \sup(E+F), \text{ где је}$$
$$E+F := \{x+y \mid x\in E,\ y\in F\}.$$

9. Нека је $(A,+,\leq,0)$ комплетна потпуно уређена Абелова група и $B\subseteq A$ нека комплетна густа подгрупа. Тада је $B=A$.
(<u>помоћ</u>: за $a\in A$, посматрати скуп $S_a := \{b\in B\mid b<a\}\subseteq B$).